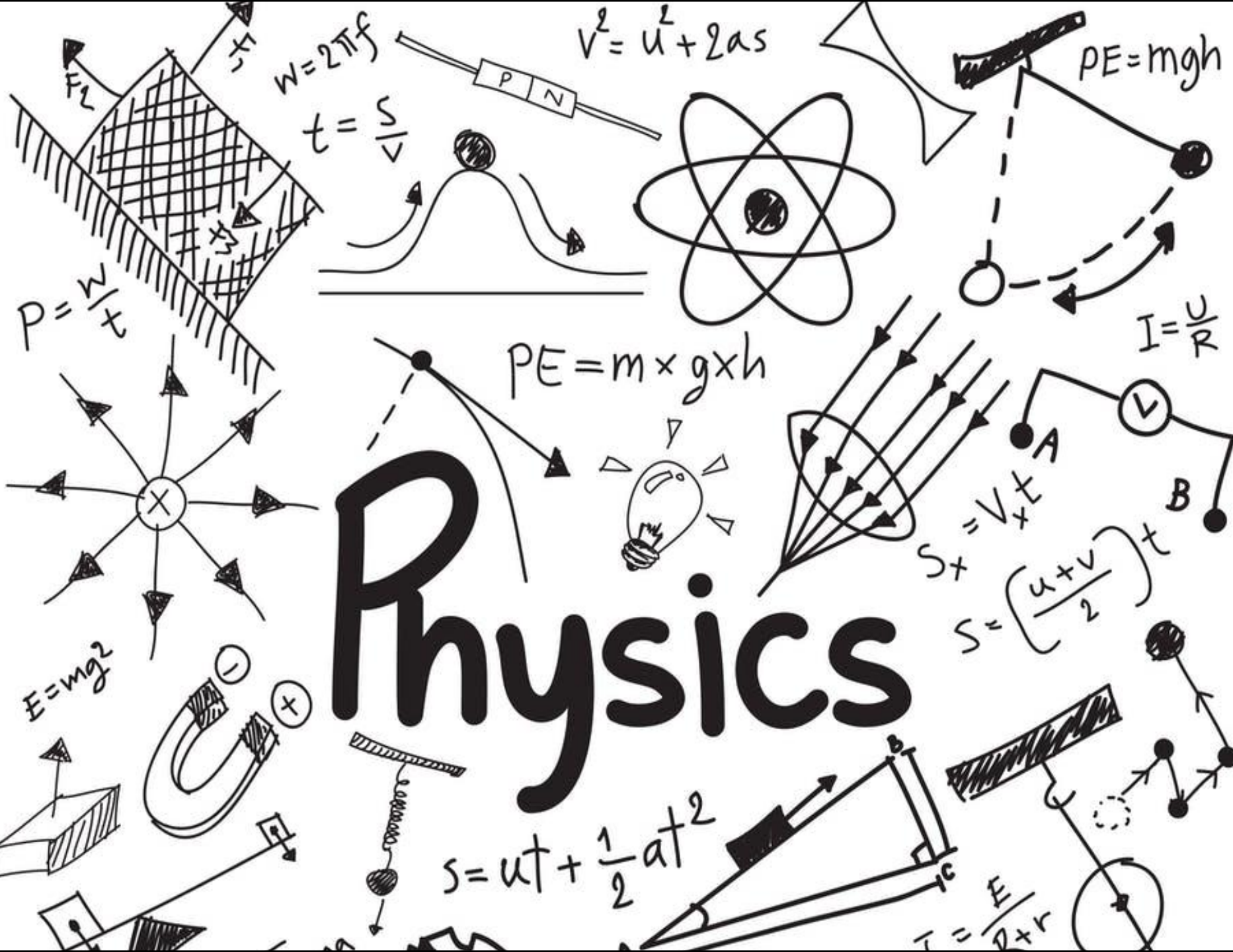


Physics



Reminder...

- ◉ Διαλέξεις
 - ◉ Προαιρετική παρουσία!
- ◉ Είστε εδώ γιατί **θέλετε** να ακούσετε/συμμετέχετε
- ◉ Δεν υπάρχουν απουσίες
- ◉ Υπάρχει σεβασμός στους συναδέλφους σας και στην εκπαιδευτική διαδικασία
- ◉ Προστατέψτε εσάς και τους συναδέλφους σας: απέχετε από το μάθημα αν δεν είστε/αισθάνεστε καλά



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». © (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Πεδία



Εικόνα: Μητέρα και κόρη απολαμβάνουν την επίδραση της ηλεκτρικής φόρτισης των σωμάτων τους. Κάθε μια ξεχωριστή τρίχα των μαλλιών τους φορτίζεται και προκύπτει μια απωθητική δύναμη μεταξύ των τριχών, με αποτέλεσμα να «σηκώνονται οι τρίχες τους». © (Courtesy of Resonance Research Corporation)

Φυσική για Μηχανικούς

Ηλεκτρικά Πεδία

Ηλεκτρική Δύναμη (επανάληψη...)

- Ο νόμος του Coulomb

- Το μέτρο της ηλεκτρικής δύναμης ανάμεσα σε δυο ακίνητα φορτισμένα σωματίδια q_1, q_2 (μηδενικού μεγέθους) που απέχουν απόσταση r μεταξύ τους δίνεται από τη σχέση

$$F_e = k_e \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$$

όπου k_e είναι η σταθερά του Coulomb

- Σταθερά k_e

$$k_e = 9 \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

- Επίσης, γράφεται ως $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

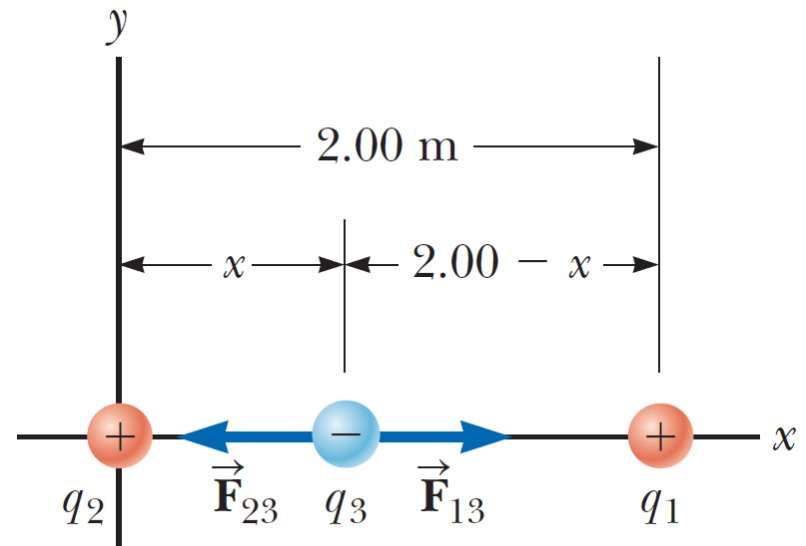
όπου ϵ_0 η **διηλεκτρική σταθερά του κενού**

- Το μικρότερο ελεύθερο φορτίο που έχει βρεθεί στη φύση είναι
 $e = 1.602 \times 10^{-19} C$

Ηλεκτρική Δύναμη

- Παράδειγμα:

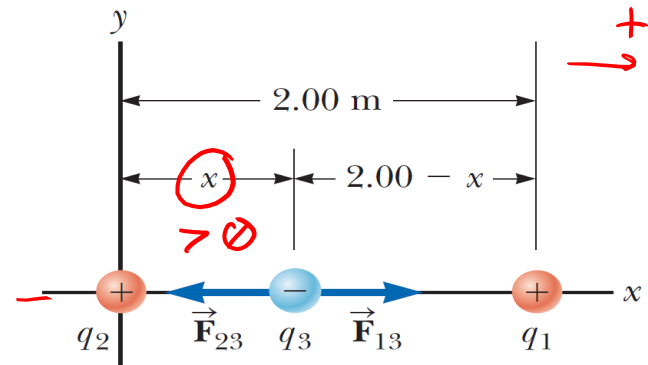
- Τρία φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται επάνω στον x -άξονα όπως στο σχήμα. Το $q_1 = 15 \mu\text{C}$ βρίσκεται στη θέση $x = 2 \text{ m}$, το $q_2 = 6 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η συνισταμένη των δυνάμεων στο q_3 είναι μηδέν. Βρείτε τη θέση του q_3 .



Ηλεκτρική Δύναμη

• Παράδειγμα – Λύση:

- Το $q_1 = 15 \mu\text{C}$ στη θέση $x = 2 \text{ m}$, το $q_2 = 6 \mu\text{C}$ βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η συνισταμένη των δυνάμεων στο q_3 είναι μηδέν. Βρείτε τη θέση του q_3 .



Αφαι το φορτίο q_3 ισορροπεί, ισχύει ο 1ος Νόμος Newton.

$$\Sigma \vec{F}_x = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_{23} + \vec{F}_{13} = \vec{0} \Rightarrow -F_{23} + F_{13} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k_e \frac{|q_2| \cdot |q_3|}{x^2} + k_e \frac{|q_1| \cdot |q_3|}{(2-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{|q_1|}{(2-x)^2} = \frac{|q_2|}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{15 \cdot 10^{-6}}{(2-x)^2} = \frac{6 \cdot 10^{-6}}{x^2} \Leftrightarrow \frac{15}{(2-x)^2} = \frac{6}{x^2} \Leftrightarrow 15x^2 = 6(4 - 4x + x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.775 \text{ m} \checkmark \\ x_2 = -3.44 \text{ m} \times \end{cases}$$

Το q_3 δει ισορροπεί, αλλιώς οι $\vec{F}_{23}, \vec{F}_{13}$ έχουν το ίδιο μέτρο!

Ηλεκτρικά Πεδία

• Ηλεκτρικό πεδίο

- Πώς «γνωρίζει» ένα φορτισμένο σωματίδιο την παρουσία ενός άλλου φορτισμένου σωματιδίου ώστε να αναπτυχθεί δύναμη Coulomb μεταξύ τους;
 - Για να απαντήσουμε σε αυτό χρειαζόμαστε την έννοια του **πεδίου**
- Η έννοια του πεδίου αναπτύχθηκε από τον M. Faraday
- **Ηλεκτρικό πεδίο** υπάρχει σε μια περιοχή του χώρου γύρω από ένα φορτισμένο σωματίδιο...
 - ...που λέγεται **πηγή φορτίου**
- Το αντιλαμβανόμαστε όταν ένα άλλο (αρκετά μικρότερο) φορτισμένο σωματίδιο εισέρχεται στο ηλεκτρικό πεδίο και τότε μια ηλεκτρική δύναμη ασκείται πάνω του

Ηλεκτρικά Πεδία

• Ηλεκτρικό πεδίο

- Ορίζουμε το **διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου** $\vec{E}$ σε ένα σημείο του χώρου ως η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα μικρό φορτίο q_0 , δια το φορτίο αυτό

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0}$$

- Άρα το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου έχει την **ίδια κατεύθυνση με τη δύναμη** που θα ασκούσαν σε ένα μικρό **θετικό** φορτίο q_0
- Ένα ηλεκτρικό πεδίο υπάρχει σε ένα σημείο του χώρου αν ένα φορτισμένο σωματίδιο (με μικρό φορτίο q_0) υφίσταται μια ηλεκτρική δύναμη

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

Το q_0 αποκαλείται συχνά και «δοκιμαστικό φορτίο»

Ηλεκτρικά Πεδία

$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

• Ηλεκτρικό πεδίο

- Αν το q_0 είναι θετικό, η δύναμη έχει την ίδια κατεύθυνση με το διάνυσμα του ηλεκτρ. πεδίου στο σημείο του φορτίου q_0
- Αν το q_0 είναι αρνητικό, το διάνυσμα του ηλεκτρ. πεδίου στο σημείο του φορτίου q_0 και η ηλεκτρική δύναμη έχουν αντίθετες κατευθύνσεις
- Το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ σε ένα σημείο P λόγω της παρουσίας **πηγής φορτίου** q σε απόσταση r δίνεται ως

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

- Το **μέτρο** του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P δίνεται ως

$$E = k_e \frac{|q|}{r^2}$$

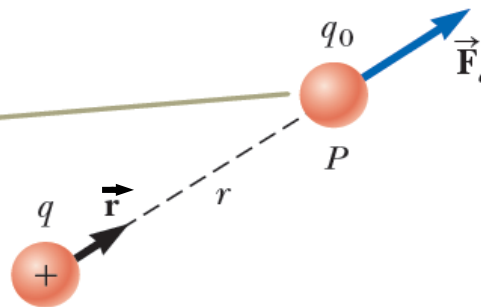
Ηλεκτρικό πεδίο
αποκλειστικά εξαρτώμενο
από την πηγή φορτίου q !

Ηλεκτρικά Πεδία

• Ηλεκτρικό πεδίο

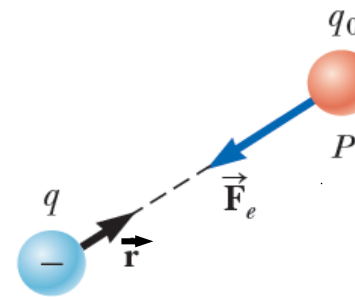
$$\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$$

Αν το q είναι θετικό, η δύναμη επάνω στο q_0 έχει κατεύθυνση μακριά από το q .



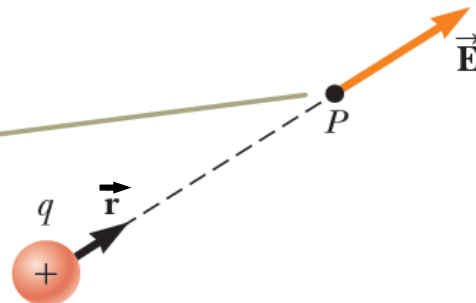
a

Αν το q είναι αρνητικό, το σωματίδιο q_0 κατευθύνεται προς το q .



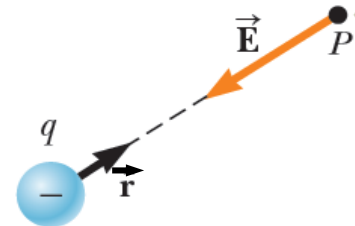
c

Αν το q είναι θετικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P δείχνει ακτινικά προς τα έξω από το q .



b

Αν το q είναι αρνητικό, το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P δείχνει ακτινικά προς το q .



d

Θετική πηγή φορτίου $\rightarrow$ φορά πεδίου «προς τα έξω»

Αρνητική πηγή φορτίου $\rightarrow$ φορά πεδίου «προς τα μέσα»

Ηλεκτρικά Πεδία

- **Ηλεκτρικό πεδίο**

- Τι συμβαίνει αν έχουμε πολλές πηγές φορτίου q_i ;
- Ηλεκτρικό πεδίο: διανυσματικό μέγεθος

$$\vec{E}_P = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$

όπου r_i η απόσταση κάθε πηγής από ένα σημείο P και $\vec{r}_i$ το μοναδιαίο διάνυσμα από την πηγή i στο σημείο P

- Προσθέτουμε διανυσματικά τις επιμέρους συνεισφορές
- Πολλές φορές, η ανάλυση σε συνιστώσες είναι πολύ βολική!

Ηλεκτρικά Πεδία

• Παράδειγμα:

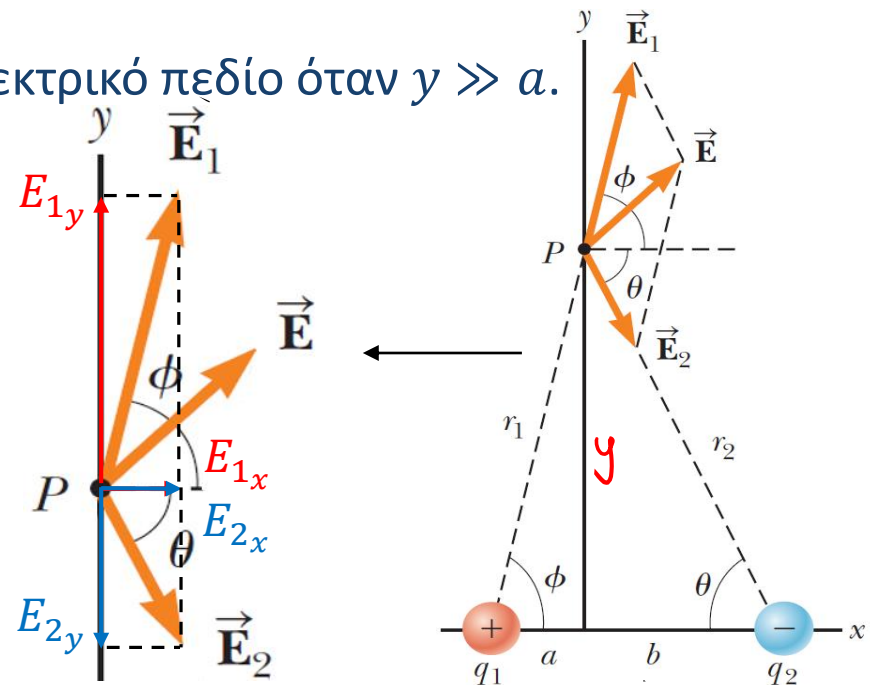
- Φορτία q_1, q_2 βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα, σε αποστάσεις a και b , αντίστοιχα, από την αρχή των αξόνων, όπως στο σχήμα.

A) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο P ($0, y$).

B) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$.

Γ) Στο B) ερώτημα, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.

Θα διαλέψαμε σε συνιστώσες
στα επιμέρους $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ και
θα τις προσθέσουμε ως
διανύσματα.



Ηλεκτρικά Πεδία

• Παράδειγμα – Λύση:

- Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P (0, y)$.

Στο σημείο P , υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}_P$.

Ότι $\vec{E}_P = \vec{E}_{Px} + \vec{E}_{Py} = E_{Px} \vec{i} + E_{Py} \vec{j}$

Θα δαλέψουμε κατά άξονες: στο σημείο P

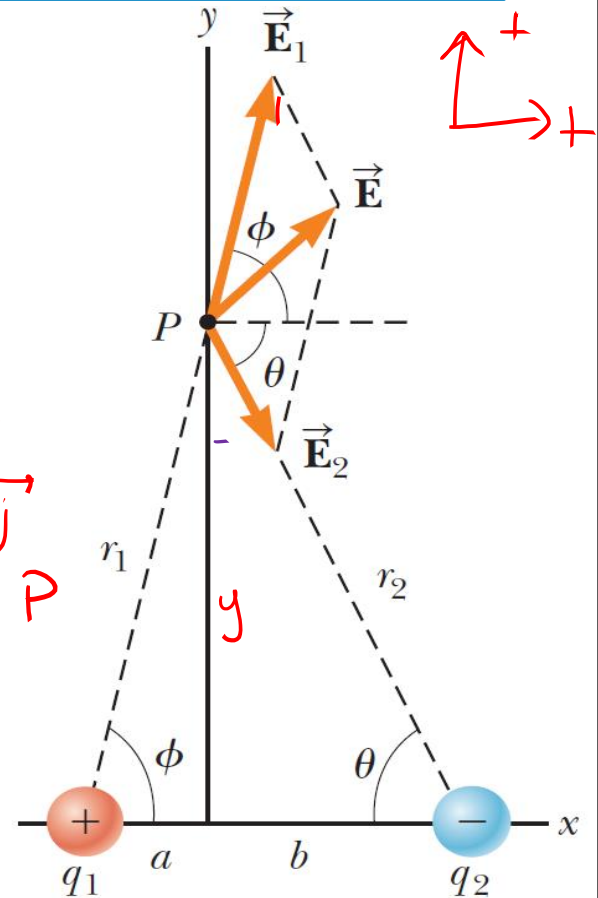
→ x -άξονα: $\vec{E}_{Px} = \vec{E}_{1x} + \vec{E}_{2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow E_{Px} = E_{1x} + E_{2x}$ ①

→ y -άξονα: $\vec{E}_{Py} = \vec{E}_{1y} + \vec{E}_{2y} \Rightarrow E_{Py} = E_{1y} - E_{2y}$ ②

Λεγα

$E_{1x} = E_1 \cdot \cos \phi = k_e \frac{|q_1|}{r_1^2} \cdot \cos \phi = k_e \frac{q_1}{y^2 + a^2} \cos \phi$ ③



Ηλεκτρικά Πεδία

• Παράδειγμα – Λύση:

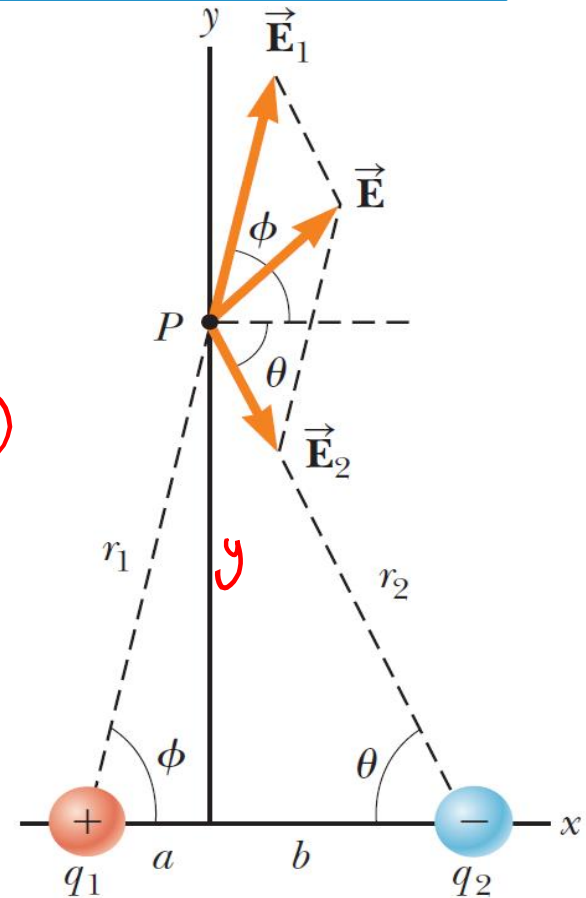
- Α) Βρείτε τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο $P (0, y)$.

$$E_{1y} = E_1 \sin(\varphi) = k_e \frac{|q_1|}{y^2 + a^2} \sin(\varphi) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E_{2x} &= E_2 \cdot \cos(\theta) = k_e \frac{|q_2|}{r_2^2} \cdot \cos(\theta) \\ &= k_e \frac{|q_2|}{y^2 + b^2} \cdot \cos(\theta) \quad (5) \end{aligned}$$

$$E_{2y} = k_e \frac{|q_2|}{y^2 + b^2} \sin(\theta) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad (3) \quad E_{Px} &= E_{1x} + E_{2x} = k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \cos(\varphi) + \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \cos(\theta) \right) \\ (2) \quad (4) \quad (5) \quad (6) \quad E_{Py} &= E_{1y} - E_{2y} = k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2 + y^2} \sin(\varphi) - \frac{|q_2|}{b^2 + y^2} \sin(\theta) \right) \end{aligned}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

• Παράδειγμα – Λύση:

- Β) Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P στην ειδική περίπτωση που $|q_1| = |q_2|$ και $a = b$. ①

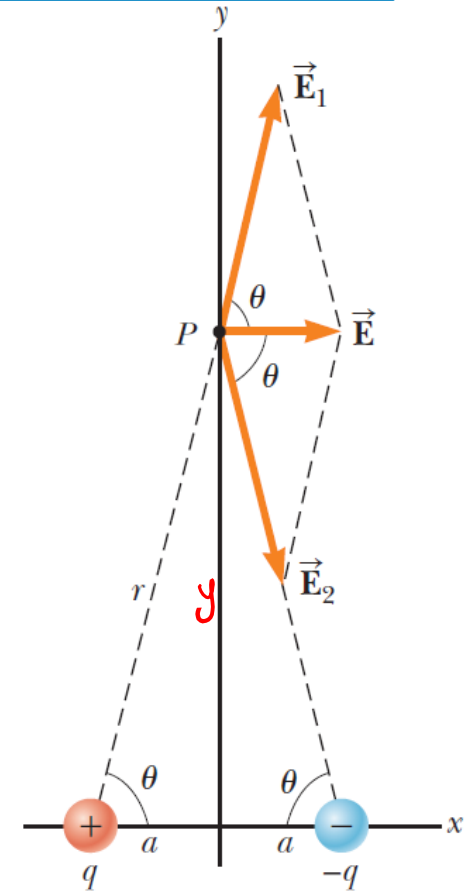
Βρίκαμε πριν ότι

$$\left. \begin{aligned} E_{Px} &= k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2+y^2} \cos\varphi + \frac{|q_2|}{b^2+y^2} \cos\vartheta \right) \\ E_{Py} &= k_e \left(\frac{|q_1|}{a^2+y^2} \sin\varphi - \frac{|q_2|}{b^2+y^2} \sin\vartheta \right) \end{aligned} \right\} \xRightarrow{①}$$

$$\xRightarrow{①} E_{Px} = k_e \left(\frac{|q|}{a^2+y^2} \cos\vartheta + \frac{|q|}{a^2+y^2} \cos\vartheta \right) \\ = 2 k_e \frac{|q|}{a^2+y^2} \cos\vartheta$$

$$E_{Py} = k_e \left(\frac{|q|}{a^2+y^2} \sin\vartheta - \frac{|q|}{a^2+y^2} \sin\vartheta \right) = 0 \leftarrow$$

$$\text{Άρα } \vec{E}_P = E_{Px} \vec{i}$$



η y-συνιστώσα
του η2 πεδίου
στο P μηδενίζεται!

Ηλεκτρικά Πεδία

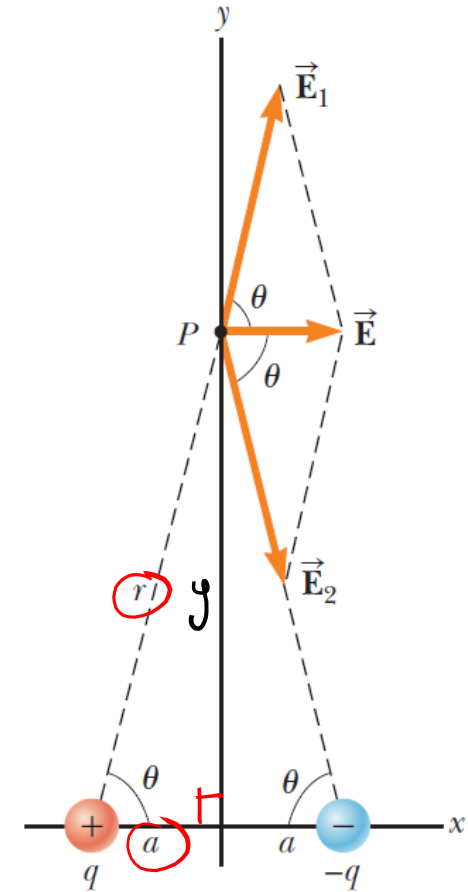
• Παράδειγμα – Λύση:

- Γ) Στο Β) ερώτημα, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο όταν $y \gg a$.

Στο β) βρήκαμε ότι

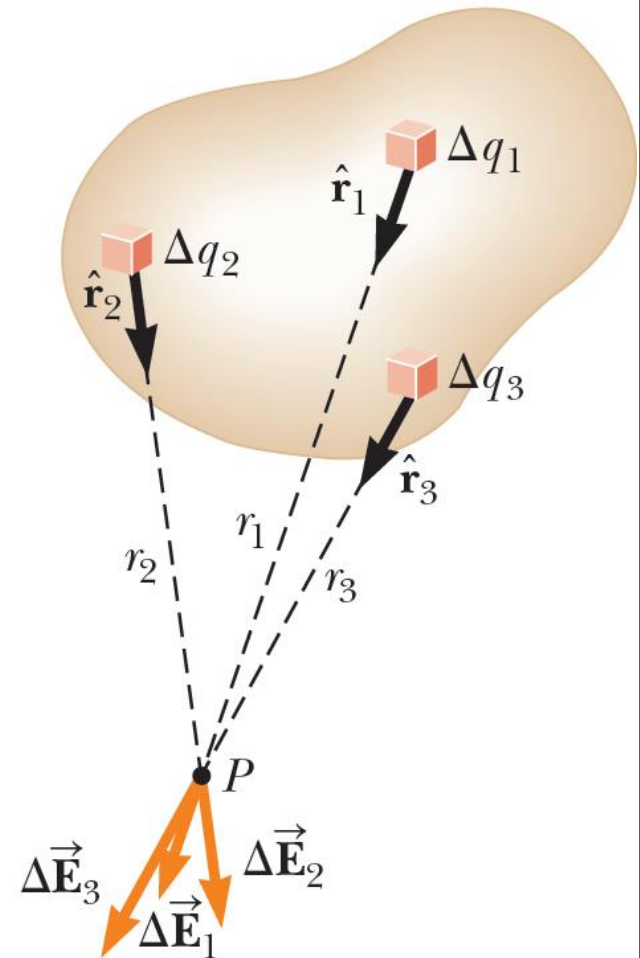
$$E_p = 2k_e \frac{|q|}{a^2 + y^2} \cos\theta = E_{px} \cdot \left. \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_p = 2k_e \frac{|q|a}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left. \begin{aligned} y \gg a &\Rightarrow y^2 \gg a^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2 + y^2 \approx y^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_p = 2k_e \frac{|q| \cdot a}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} = 2k_e \frac{|q|a}{y^3}$$



Ηλεκτρικά Πεδία

- Η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου είναι χρήσιμη για μικρά φορτία
- Πολλές φορές έχουμε μια **κατανομή φορτίου** αντί για σημειακά φορτία
- Σε αυτές τις περιπτώσεις, η περιγραφή του ηλεκτρικού φορτίου είναι συνεχώς και ομοιόμορφα κατανεμημένη σε μια γραμμή, επιφάνεια, ή όγκο



Ηλεκτρικά Πεδία

- Προσεγγιστικά

$$\vec{E} \approx k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{r}_i$$

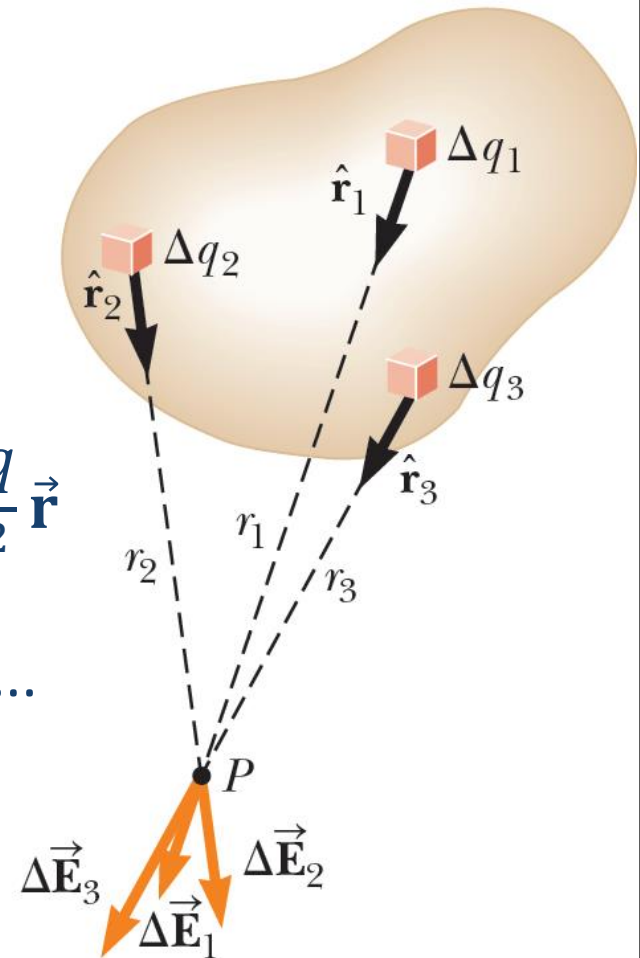
- Μπορούμε όμως να γράψουμε

$$\vec{E} = k_e \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \vec{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \vec{r}$$

- Το ολοκλήρωμα είναι διανυσματικό...

- και μπορεί να περιλαμβάνει

- μια γραμμή
- μια επιφάνεια
- ή έναν όγκο



Ηλεκτρικά Πεδία

- Προς βοήθειά μας, θα ορίσουμε
 - Γραμμική πυκνότητα φορτίου

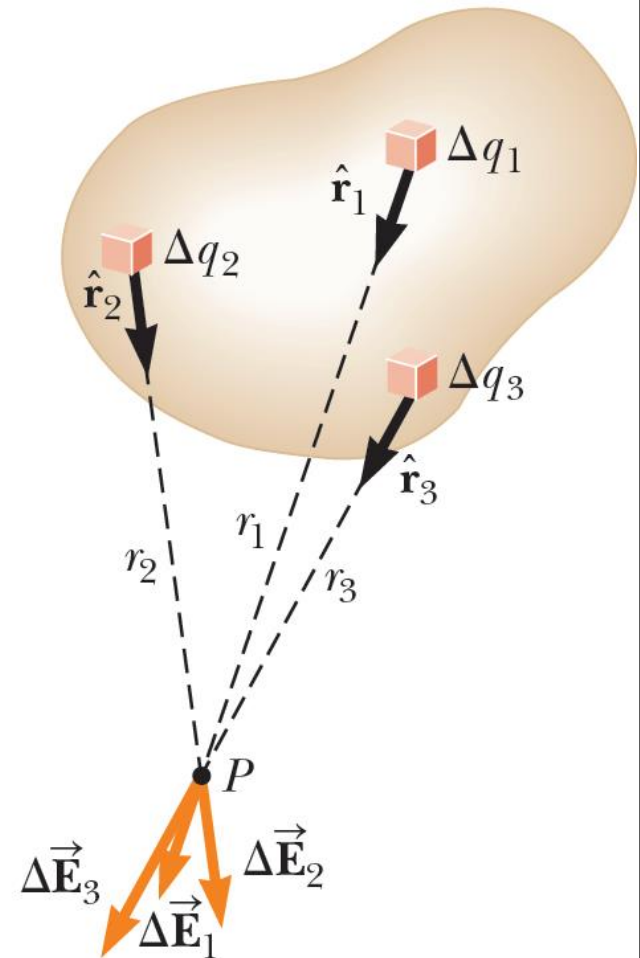
$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

- Επιφανειακή πυκνότητα φορτίου

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

- Χωρική πυκνότητα φορτίου

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

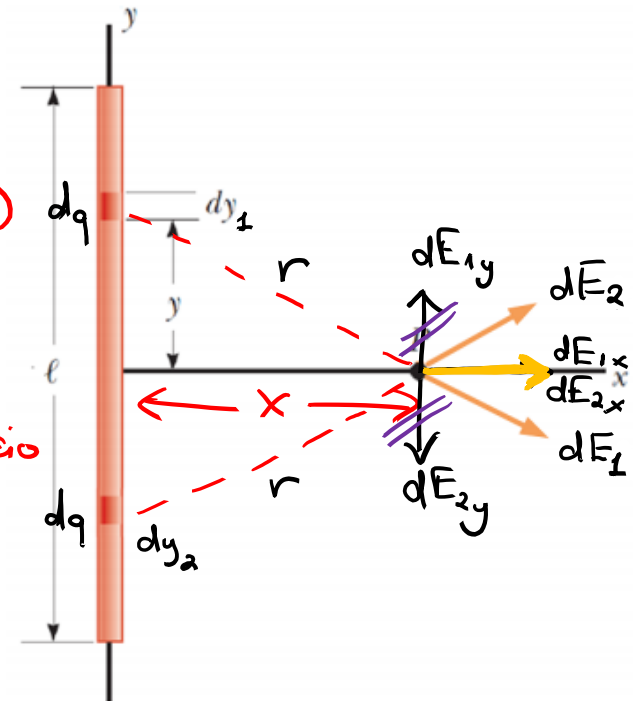


Ηλεκτρικά Πεδία

• Παράδειγμα 1:

- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P που βρίσκεται σε απόσταση x από το μέσον της ράβδου, όπως στο σχήμα.

Τμηματοποιάμε τη ράβδο σε φορτία dq , μήκους dy . Λόγω της ομοιόμορφης κατανομής φορτία, $\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{dq}{dy}$. ①
Λόγω συμμετρίας, τυχάνει και οι y -συνιστώσες των φορτίων dq στο σημείο P να αλληλοεξουδετερώνονται. Άρα το σημείο P έχει μόνο x -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου:
$$\vec{E}_P = E_{Px} \cdot \vec{i}$$



$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

● Παράδειγμα 1 – Λύση:

- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Για το φορτίο dq_1 , το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P θα είναι:

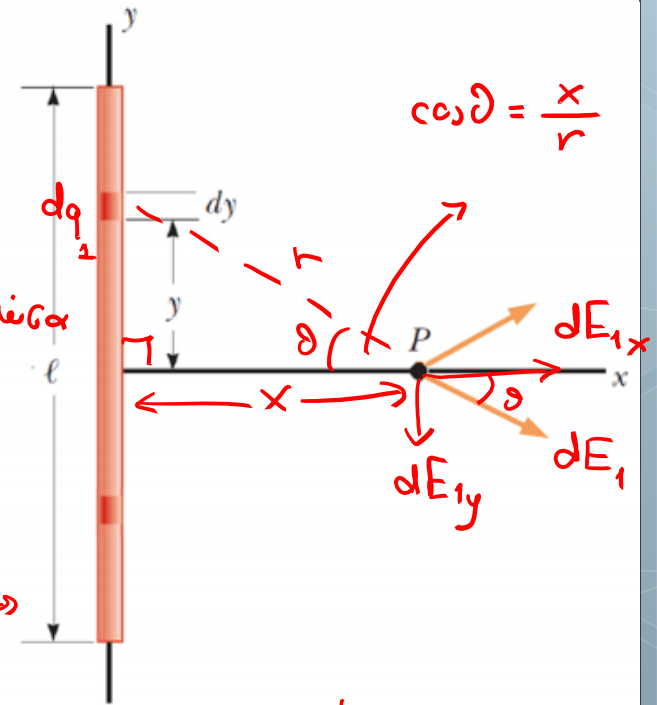
$$dE_1 = k_e \frac{|dq_1|}{r^2} = k_e \frac{|dq_1|}{x^2 + y^2} \quad \text{Η x-συνιστώσα}$$

στο σημείο P για το dE_1 , θα είναι:

$$dE_{1,x} = dE_1 \cdot \cos\theta = k_e \frac{|dq_1|}{x^2 + y^2} \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$



$$\Rightarrow dE_{1,x} = k_e \frac{|dq_1| x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

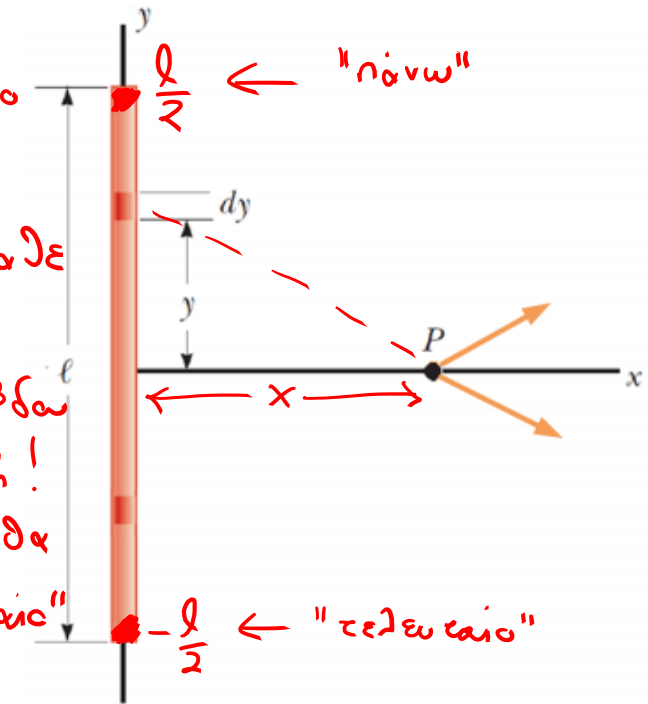
Ηλεκτρικά Πεδία

• Παράδειγμα 1 – Λύση:

- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Για να βρω το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P πρέπει να "αθροίσω" όλες τις ανεξαρτήτως μικρές συνεισφορές dE_i από κάθε φορτίο dq_i της ράβδου. Τα φορτία dq_i βρίσκονται σε διαφορετικές θέσεις της ράβδου και άρα έχουν διαφορετικό $y \leftarrow$ μεταβολή!

Όμως καταλαβαίνω ότι το "πάνω" φορτίο θα βρίσκεται στη θέση $y = \frac{l}{2}$ και το "τελευταίο" στη θέση $y = -\frac{l}{2}$. Άρα



$$E_{Px} = \int dE_i = \int k_e \frac{|dq_i| \cdot x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{dq_i > 0}{dq = dq_i} = k_e \int \frac{x \cdot dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$

Ηλεκτρικά Πεδία

• Παράδειγμα 1 – Λύση:

- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Το στοιχειώδες έχει διαφορικό dq και μεταβλητό y ! Όπως (1) $\Rightarrow \frac{dq}{dy} = \lambda \Rightarrow dq = \lambda dy$! Άρα

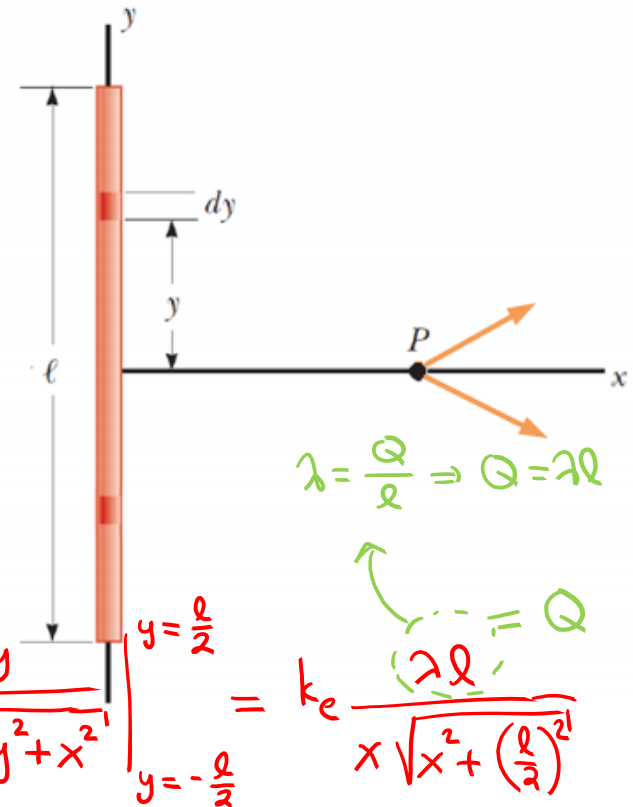
$$E_{Px} = k_e \int \frac{x \lambda dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = k_e \lambda x \int \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Ποιά είναι τα άκρα του στοιχειώφους?

Φυσικά τα $y = -l/2$, $y = l/2$. Άρα

$$E_{Px} = k_e \lambda x \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \stackrel{(2)}{=} k_e \lambda x \left. \frac{y}{x^2 \sqrt{y^2 + x^2}} \right|_{y=-\frac{l}{2}}^{y=\frac{l}{2}} = k_e \frac{\lambda l}{x \sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2}} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2}}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \quad (2)$$



Ηλεκτρικά Πεδία

• Παράδειγμα 1 – Λύση:

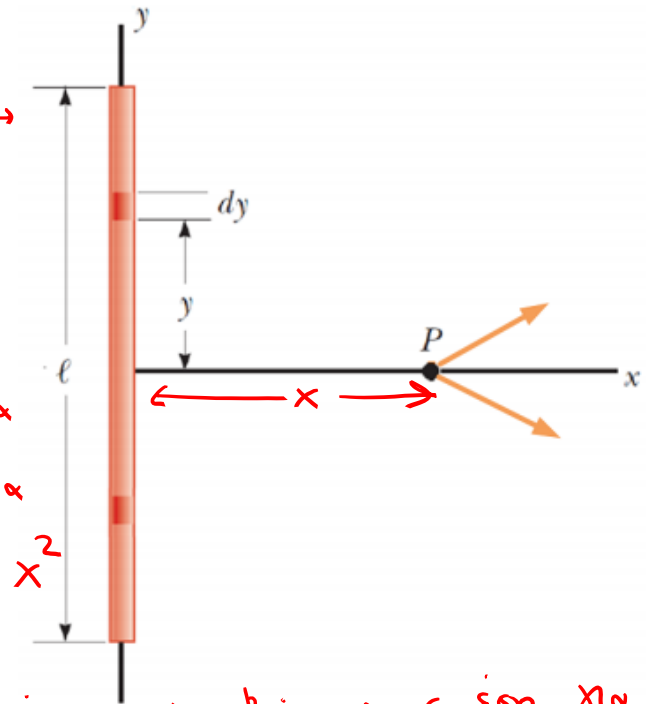
- Μια ράβδος μήκους l έχει ομοιόμορφη κατανομή θετικού φορτίου ανά μονάδα μήκους λ και συνολικό φορτίο $Q > 0$. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο P.

Άρα τελικά $\vec{E}_P = E_{Px} \vec{i} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2 + (\frac{l}{2})^2}} \vec{i}$

Sanity check: τι θα γίνει αν $x \gg l$? Αν
είμαστε μακριά από τη ράβδο, περιμέναμε να
συμπεριφέρεται ως "σημειακό φορτίο". Για να
δούμε: $x \gg l \Rightarrow x^2 \gg (\frac{l}{2})^2 \Rightarrow x^2 + (\frac{l}{2})^2 \approx x^2$

Άρα

$$E_{Px} = k_e \frac{Q}{x \sqrt{x^2}} = k_e \frac{Q}{x^2}, \text{ που είναι ακριβώς η σχέση για το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου!}$$



$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$$



Συνεχίζεται... 😊

